Hallar el determinante de la matriz | A |

Hallar
| A |

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{A4x4}$$

Solución del ejercicio

Por definición, en algebra lineal, toda matriz de orden cuadrado tiene determinante, es decir, una matriz tiene determinante si y solo si es de orden cuadrático, o sea, 1x1, 2x2, 3x3,4x4,5x5, etc…

El determinante de una matriz se denota como | A | o det A, siendo A una matriz cuadrada $|\ A\ |_{nxn}$ y el resultado es un escalar positivo o negativo según el cálculo realizado con sus elementos.

Las propiedades básicas más comunes que maneja el cálculo de determinantes es el producto por escalar.

Si **A** [(a11 a12 a13 a14), (a21 a22 a23 a24), (a31 a32 a33 a34), (a41 a42 a43 a44)] *nxn* donde n = 4 entonces | A[a] | = *a11* * |*mIn[a11]*| **-** *a12* * | *mIn[a12]* | **+** *a13* * | *mIn[a13]* | **-** *a14* * |*mIn[a14]* | , es decir el determinante de una matriz de orden 4x4 es el producto de cada elemento de la primera fila por el respectivo determinante interno de 3x3. Este determinante interno que lo llamamos con fines de entendimiento como *mIn*, se obtiene cancelando toda la fila y columna donde se encuentra el elemento actual, quedando una matriz A_{3x3}. Los signos de cada elemento de la primera fila son alternados. Este proceso resume la explicación técnica o estricta del cálculo de los cofactores de cada elemento de la primera fila y la matriz adjunta para inversas.

No siempre la primera fila es la más eficaz para usar, es más recomendable usar la fila con más ceros como elementos, ya que ahorraría varios cálculos.

Recordar que el ***cofactor*** es definido como el producto de un escalar con signo (+/-) multiplicado por el determinante de la matriz menor o matriz interna.

Así, ***Cofactor*** $\mathbf{A_{ij}} = (-1)^{i+j} \, |\mathbf{M_{ij}}|$

Matriz Menor o Interna

Calculo del signo

Entonces, hallando el determinante a la matriz A por cofactores se tiene:

Vemos que la fila tres tiene mas ceros por lo cual el cálculo del determinante se haría más rápido. Veamos:

$$A = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{A4x4} = (-1)^{3+1} \, -2 * \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Cofactor A_{31}

$$= -2 * \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Nuevamente, vemos una fila con varios ceros, usamos el Cofactor A23

$$= -2 * \left[(-1)^{2+3} \, 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right]$$

$$= -2 * -1 * ((2*1)-(3*1))$$

$$= -2 * (1)$$

$$= -2$$